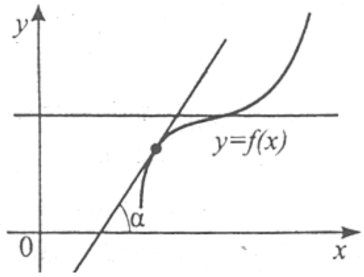
Достатня умова зростання (спадання) функції на проміжку

Відомо, що функцію $y=f(x)$ називають зростаючою на деякому проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать проміжку, з умови $x_2>x_1$ випливає, що $f(x_2)>f(x_1)$.

Дотична в кожній точці графіка зростаючої функції, утворює з додатним напрямом осі OX або гострий кут, або кут, що дорівнює нулю (в останньому випадку дотична є паралельною осі OX).

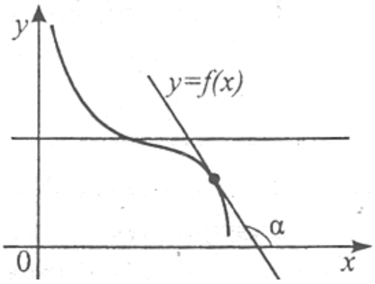


Виходячи з геометричного змісту похідної, $tg\,\alpha = f'(x_0)$. Це означає, що похідна в кожній точці проміжку невід'ємна, тому для зростаючої функції $f(x)$ виконується умова

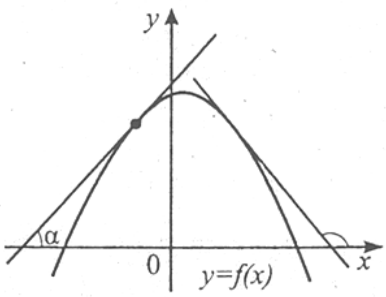
$$f'(x_0) \geq 0.$$

Функцію $y=f(x)$ називають спадною на проміжку, якщо для будь-яких x_1 і x_2, що належать проміжку, з умови $x_2>x_1$ випливає, що $f(x_2)<f(x_1)$. Дотична в кожній точці графіка спадної функції, утворює з віссю OX або тупий кут, або кут, що дорівнює нулю, тому для функції $f(x)$, яка спадає на деякому проміжку, виконується умова

$$f'(x_0) \leq 0.$$



Одна й та сама функція може на одному проміжку області її визначення зростати, а на іншому – спадати. Характер поведінки функції на кожному із цих проміжків визначається знаком її похідної.

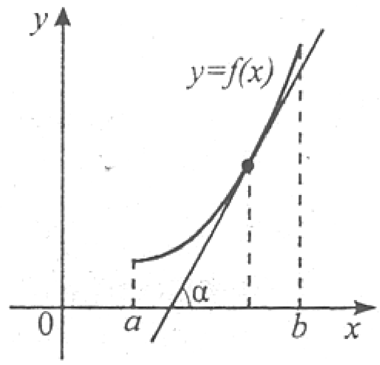


Отже, наочне уявлення дозволяє сформулювати властивості зростаючих та спадних функцій.

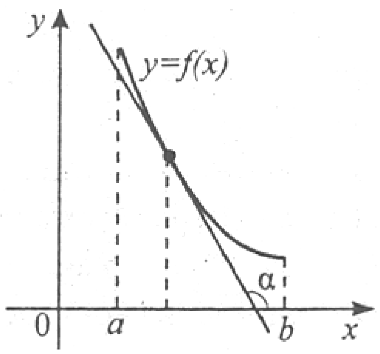
Якщо функція $y=f(x)$ диференційована і зростає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку невід’ємна.

Якщо функція $y=f(x)$ диференційована і спадає на деякому проміжку, то її похідна на цьому проміжку недодатна.

Проте для розв’язування задач особливо важливими є обернені твердження, які виражають ознаки зростання і спадання функції на проміжку. Нехай значення похідної функції $y=f(x)$ додатні на деякому проміжку, тобто $f^{'}(x) > 0$. Оскільки $tg\ \alpha = f^{'}(x)$, то з умови tg $\alpha>0$ випливає, що дотичні, проведені до графіка функції в будь-якій точці цього інтервалу, утворюють гострі кути з додатним напрямом осі OX. У цьому випадку графік функції «піднімається» на заданому проміжку, тобто функція зростає.



Якщо $f^{'}(x) < 0$ на деякому проміжку, то кутовий коефіцієнт дотичної $tg\ \alpha = f^{'}(x)$ до графіка функції $y=f(x)$ від’ємний. Це означає, що дотична до графіка функції утворює з віссю OX тупий кут і графік функції на даному проміжку «опускається», тобто функція $f(x)$ спадає.



Якщо $f^{'}(x) > 0$ на проміжку, то функція $f(x)$ зростає на цьому проміжку.

Якщо $f^{'}(x) < 0$ на проміжку, то функція $f(x)$ спадає на цьому проміжку.

Ці два твердження називають *ознаками зростання (спадання)* функції на проміжку.

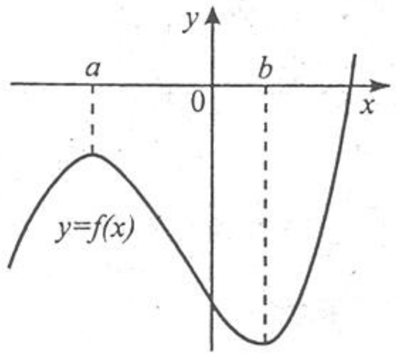
Проміжки зростання і спадання функції часто називають проміжками монотонності цієї функції.

Поняття екстремуму функції

При дослідженні поведінки функції в деякій точці зручно користуватися поняттям околу. *Околом* точки a називають будь-який інтервал, що містить цю точку.

Наприклад: інтервали (2; 5), (2,5; 3,5), (2,9; 3,1) – околи точки 3.

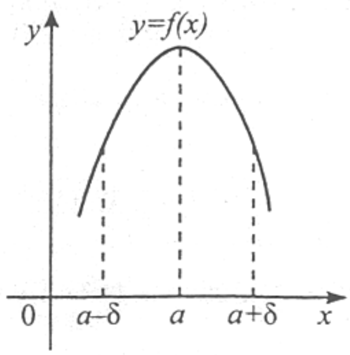
Розглянемо графік функції.



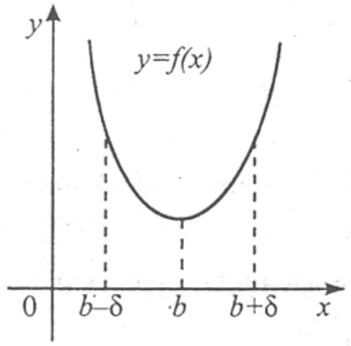
Як видно з рисунка, існує такий окіл точки $x=a$, що найбільше значення функції $y=f(x)$ у цьому околі набуває в точці $x=a$. точку $x=a$ називають точкою максимуму цієї функції.

Аналогічно точку $x=b$ називають точкою мінімуму функції $y=f(x)$, оскільки значення функції в цій точці найменше порівняно зі значеннями функції в деякому околі точки b.

Означення. Точка a з області визначення функції $f(x)$ називається точкою максимуму цієї функції, якщо існує такий окіл точки a, що для всіх $x \neq a$ із цього околу виконується нерівність $f(x)<f(a)$.



Означення. Точка b з області визначення функції $f(x)$ називається точкою мінімуму цієї функції, якщо існує такий окіл точки b, що для всіх $x \neq b$ із цього околу виконується нерівність $f(x)>f(b)$.



Точки максимуму і точки мінімуму називають *точками екстремуму* функції, а значення функції в цих точках – екстремумами функції (максимум і мінімум функції).

Точки максимуму позначають x_{max}, а точки мінімуму – x_{min}. Значення функції в цих точках, тобто максимуми і мінімуми, позначають відповідно y_{max} і y_{min}.

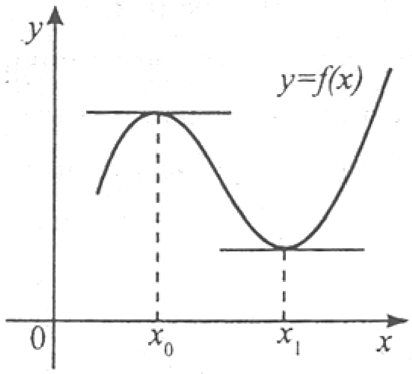
Необхідна умова екстремуму

Розглянемо функцію $y=f(x)$, яка визначена в деякому околі точки x_0 і має похідну в цій точці.

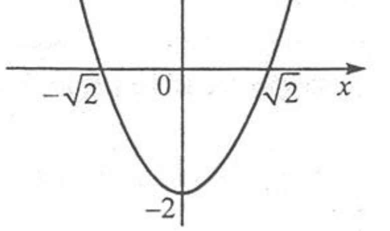
Якщо x_0 – точка екстремуму диференційованої функції $y=f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Це твердження називають ***теоремою Ферма*** на честь французького математика П'єра Ферма (1601 – 1665).

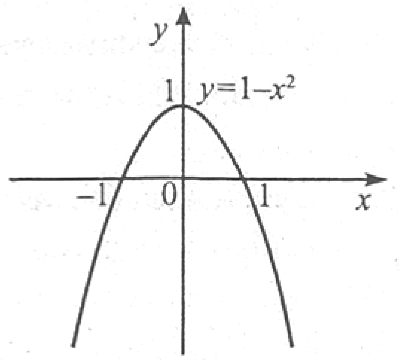
Теорема Ферма має наочний геометричний зміст: у точці екстремуму дотична паралельна осі абсцис, і тому її кутовий коефіцієнт $f'(x)$ дорівнює нулю.



Наприклад: функція $f(x) = x^2 - 2$ має в точці x_0=0 мінімум, її похідна $f'(0) = 0$.

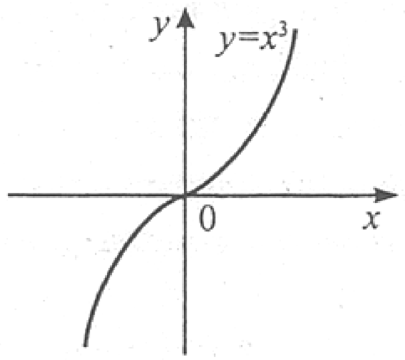


Функція $f(x) = 1 - x^2$ має максимум в точці x_0=0, $f'(x) = -2x, f'(0) = 0$.



Слід зазначити, що якщо $f'(x_0) = 0$, то x_0 необов'язково є точкою екстремуму.

Наприклад: якщо $f(x) = x^3$, то $f'(x) = 3x^2$ і $ff'(0) = 0$. Проте точка x=0 не є точкою екстремуму, оскільки функція $f(x) = x^3$ зростає на всій числовій осі.

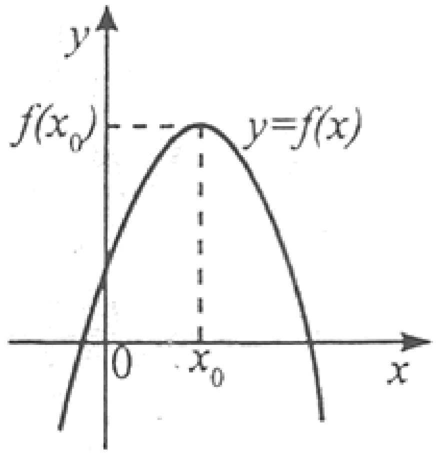


Отже, точки екстремуму диференційованої функції треба шукати тільки серед коренів рівняння $f'(x) = 0$, але не завжди корінь рівняння $f'(x) = 0$ є точкою екстремуму.

Внутрішні точки області визначення функції y=f(x), у яких похідна дорівнює нулю, називають *стаціонарними*. Отже, для того щоб точка x_0 була точкою екстремуму, необхідно, щоб вона була стаціонарною.

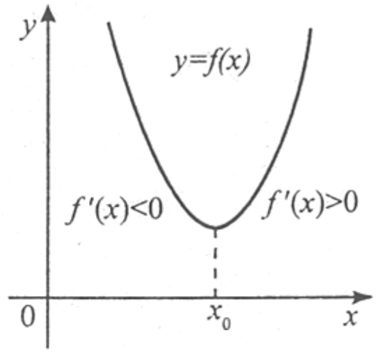
Сформулюємо достатні умови для того, щоб стаціонарна точка була точкою екстремуму, тобто умови, при виконанні яких стаціонарна точка є точкою максимуму або мінімуму функції.

Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки додатна, а праворуч – від'ємна, тобто при переході через цю точку похідна змінює знак із «+» на «-», то ця стаціонарна точка є точкою максимуму.



Дійсно, у цьому разі ліворуч стаціонарної точки функція зростає, а праворуч – спадає, отже, дана точка є точкою максимуму.

Якщо похідна ліворуч стаціонарної точки від'ємна, а праворуч – додатна, тобто при переході через стаціонарну точку похідна змінює знак із «-» на «+», то ця стаціонарна точка є точкою мінімуму.



Якщо при переході через стаціонарну точку похідна не змінює знака, тобто ліворуч і праворуч від стаціонарної точки похідна додатна або від'ємна, то ця точка не є точкою екстремуму.

Найбільше і найменше значення функції на проміжку

Розглянемо рис. 1 і 2, на яких зображено графіки функцій $y=f(x)$ і $y=g(x)$, заданих на відрізку $[a; b]$.

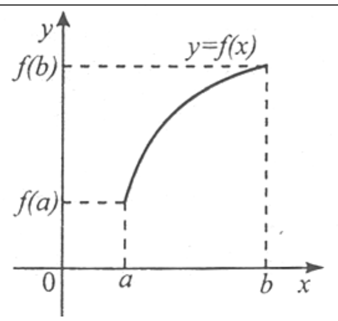
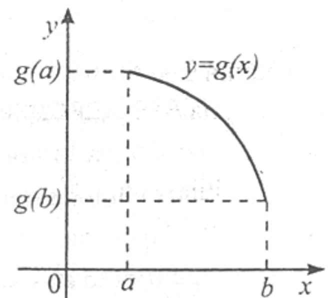
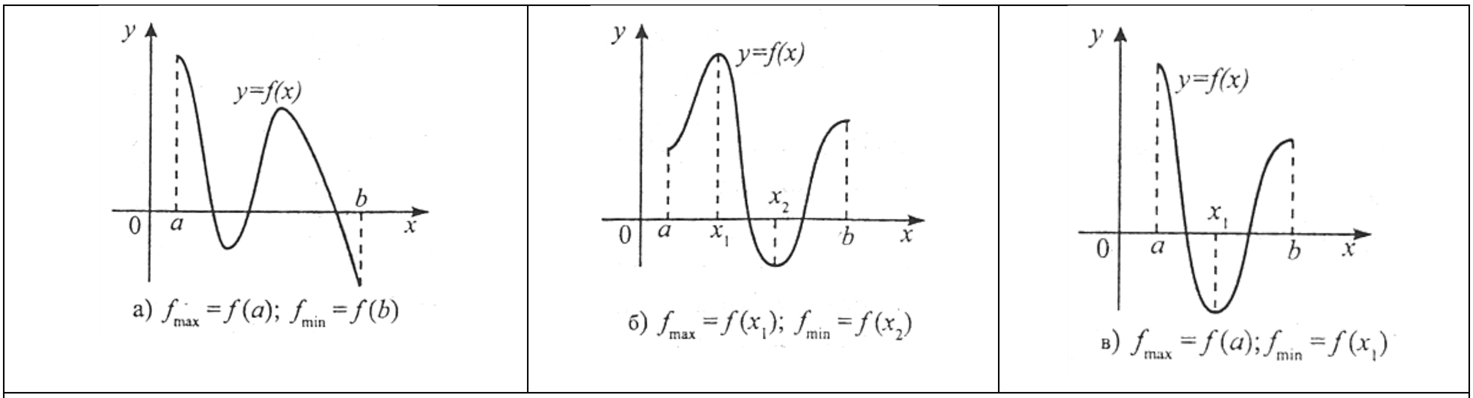
	

Рис. 1	Рис. 2

Функція $y=f(x)$ зростає, а функція $y=g(x)$ спадає. На відрізку $[a; b]$ найменше значення функції $y=f(x)$ дорівнює $f(a)$, а найменше значення функції $y=g(x)$ дорівнює $g(b)$.

Відповідно найбільші значення цих функцій на даному відрізку дорівнюють $f(b)$ та $g(a)$. Отже, якщо функція непевна і зростає (спадає) на деякому відрізку, то найбільшого і найменшого значень функція набуває на кінцях цього відрізка.

Розглянемо рис. 3, на якому зображено графіки трьох функцій. Аналіз цих графіків свідчить, що найбільше і найменше значення функцій неперервних і диференційованих на відрізку $[a; b]$ досягаються цими функціями, або на кінцях відрізка, або в стаціонарних точках.



а) $f_{\max} = f(a)$; $f_{\min} = f(b)$ б) $f_{\max} = f(x_1)$; $f_{\min} = f(x_2)$ в) $f_{\max} = f(a)$; $f_{\min} = f(x_1)$

Рис. 3

Отже, неперервна і диференційована функція на заданому відрізку набуває найбільшого і найменшого значень у стаціонарних точках або на кінцях відрізка.